САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2014 СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 1

Задачи подготовил:
Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2013 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Вторая по яркости звезда небосвода»

Условие. Как называется вторая по яркости (не считая Солнца) звезда небосвода? В каком созвездии она находится? Можно ли ее наблюдать в принципе в г. Самара? (3 балла).

Решение:

Как известно, второй по яркости звездой небосвода является ***Канопус*** – звезда южного полушария, ярчайшая в созвездии Киля, с видимым блеском -0.72^m (уступает в блеске только Сириусу, не считая Солнца).

В городе Самара видны только те звезды, склонение которых $\delta > \varphi_{samara} - 90° = 53°12' - 90° = -36°48'$. Однако склонение звезды $\delta_* = -52°41'$. Следовательно, данную звезду невозможно наблюдать в принципе в г. Самара. В этом же факте можно убедиться, используя подвижную карту звездного неба.

Ответ: Канопус, созвездие Киль; данную звезду невозможно наблюдать в принципе в г. Самара. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «Проблема принадлежности объектов созвездию»

Условие. Какие из указанных объектов (Дубхе, Мерак, Фекда, Мирах, Мегрец, Алиот, Мицар, Алькор, Фомальгаут, Бенетнаш, Гранатовая звезда Гершеля) никогда не принадлежали созвездию, часть которого представлена на рис. 1? (За каждый правильно названный объект – 1 балл).

Рис. 1.

Решение:

Очевидно, что на рис. 1 представлен известный астеризм "Ковш" созвездия Большая Медведица. Данному созвездию принадлежат Дубхе, Мерак, Фекда, Мегрец, Алиот, Мицар, Алькор, Бенетнаш. Это звезды собственно и составляют данный "ковш". Объектами, не принадлежащими созвездию, являются Мирах, Фомальгаут, Гранатовая звезда Гершеля. Так, Мирах – это достаточно яркая звезда β Андромеды; Фомальгаут – это самая яркая звезда (α) в созвездии Южной

Рыбы и одна из самых ярких звезд на ночном небе; Гранатовая звезда Гершеля – это звезда μ Цефея насыщенного красного цвета, одна из самых больших звезд, известных человечеству.

Ответ: ***Мирах***, ***Фомальгаут***, ***Гранатовая звезда Гершеля***. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Красный гигант θ Центавра»

Условие. Можно ли увидеть в г. Самара ($\varphi = 53°12'$) красный гигант θ Центавра ($\delta = -36°22'$)? (3 балла)

Дано:	***Решение:***
$\varphi = 53°12'$ $\delta = -36°22'$.	В городе Самара видны только те звезды, склонение которых больше значения $\varphi - 90° = 53°12' - 90° = -36°48'$.
Найти: можно ли увидеть?	Склонение звезды $\delta = -36°22'$, т.е. удовлетворяет неравенству. Следовательно, данная звезда может быть видна, правильно сказать, на широте г. Самара, т.к. в самом городе с его высокими зданиями горизонт не виден.

Ответ: Данная звезда может быть видна на широте г. Самара. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Десятилетие космического телескопа имени Спитцера»

Условие. 25 августа 2013 года свое десятилетие в действии отметил космический телескоп имени Спитцера (Spitzer Space Telescope). Этот космический аппарат предназначен для научных исследований космоса в инфракрасном диапазоне. Аппарат был запущен американским космическим агентством. На момент запуска он был крупнейшим в мире космическим инфракрасным телескопом. Аппарат движется по гелиоцентрической орбите, радиус которой составляет 1 а.е. Определите, какое расстояние (в астрономических единицах и километрах) "прошел" этот аппарат относительно Солнца за эти 10 лет. (4 балла)

Дано:	***Решение:***
$R = 1$ а.е., $t = 10$ лет.	Прежде всего заметим, что в условии задачи дан радиус орбиты, следовательно, ее можно представлять окружностью, длина которой есть $$L = 2\pi R = 2\,\pi\,\text{а.е.}$$
Найти: S – ?	Согласно третьему закону Кеплера, имеем $$\frac{R^3}{a_\oplus^3} = \frac{T^2}{T_\oplus^2}, \;\Rightarrow\; T = T_\oplus \left(\frac{R}{a_\oplus}\right)^{3/2} = T_\oplus = 1\,\text{год},$$

где $a_\oplus = 1$ а.е., $T_\oplus = 1$ год – большая полуось орбиты и период обращения Земли; R, T – радиус орбиты и период обращения телескопа вокруг Солнца. За время t телескоп совершил $N = t/T = 10$ оборотов. Следовательно, полное расстояние, которое "прошел" телескоп есть

$$S = N \cdot L = 2\,\pi\,R\,\frac{t}{T} = 62.8\,\text{а.е.} = 9.40 \cdot 10^9\,\text{км}. \tag{1}$$

Ответ: $S = 2\,\pi\,R\,\frac{t}{T} = 62.8\,\text{а.е.} = 9.40 \cdot 10^9\,\text{км}$. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Ночной дайвинг и Луна»

Условие. Дайвер решил выполнить ночное погружение в воду вдали от берега. В ясную ночь погружения было полнолуние, и Луна, в момент подъема дайвера с глубины, была на высоте

48° над горизонтом. Увидит ли дайвер Луну под водой, вблизи ее поверхности? Если увидит ее, то каково будет ее зенитное расстояние для дайвера до и после его всплытия? Показатель преломления воды $n = 4/3$. (4 балла).

Дано:
$h = 48°$.

Найти:
z_1, z_2 – ?

Решение:

Световой луч от Луны движется из менее плотной среды (воздух) в более плотную (вода), поэтому единственная причина – полное отражение от поверхности воды, по которой луч мог бы отразится и, следовательно, не попасть в глаз дайвера, исключена. Т.о. дайвер увидит Луну под водой, вблизи ее поверхности.

В силу рефракции (преломления) светового луча на границе "воздух-вода", Луна для дайвера под водой кажется выше над горизонтом (положение M_1, на рис. 2), нежели на самом деле (положение M_2).

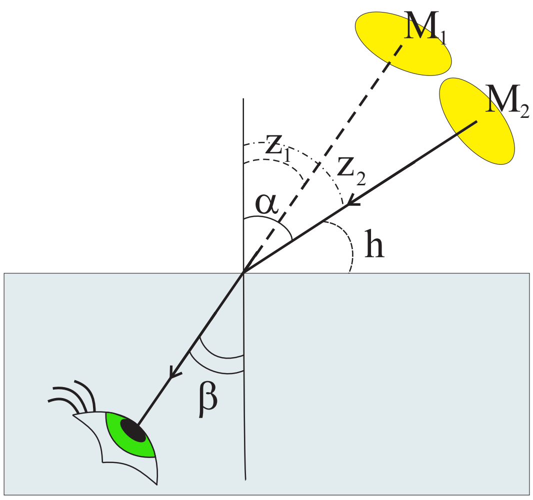

Рис. 2. К определению зенитных расстояний z_1, z_2.

Согласно рис. 2, угол преломления светового луча β и есть зенитное расстояние Луны для дайвера под водой, т.е. $z_1 = \beta$. С другой стороны, согласно закону Снеллиуса для преломленного луча имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(90° - h)}{\sin\beta} = n, \Rightarrow$$

$$z_1 = \arcsin\left[\frac{\cos \mathrm{h}}{\mathrm{n}}\right] = 30°. \tag{2}$$

здесь α – угол падения светового луча на воду. После всплытия дайвер увидит Луну как есть – под углом h к горизонту. При этом зенитное расстояние Луны в этом случае $z_2 = \alpha = 90° - h = 42°$. Т.о. явление рефракции света в воде ярко выражено (много больше чем в воздухе) и, потому должно быть принято во внимание в подобных ситуациях.

Ответ: дайвер увидит Луну под водой, вблизи ее поверхности; $z_1 = 30°$, $z_2 = 42°$. ($\$_{\max} =$ 4 балла).

Задача № 6. «Приводнение модуля и масса полезного груза»

Условие. Спускаемый модуль космического грузового аппарата при приземлении угодил в море. Модуль представляет собой герметично закрытую сферическую оболочку с внешним радиусом $R = 1.0$ м и массой $M = 2.5$ тонны. Определите максимальную массу полезного груза, находящегося в модуле, при которой он еще останется на плаву, благодаря чему его смогут спасти специалисты Роскосмоса. (5 баллов).

Дано:
$R = 1.0$ м,
$M = 2.5$ т,

Найти:
$m_{\max}$ – ?

Решение:

Условие плавания тел можно сформулировать в терминах силы тяжести $\vec{F}_{\mathrm{T}}$ и силы Архимеда $\vec{F}_{\mathrm{A}}$:

$$|\vec{F}_{\mathrm{T}}| \le |\vec{F}_{\mathrm{A}}|. \tag{3}$$

В явном виде последнее неравенство можно представить как

$$(m + M)\, g \le \rho_0\, g\, V, \;\Rightarrow\; m \le m_{\max},\; m_{\max} = \rho_0\, V - M, \tag{4}$$

здесь $\rho_0 = 1025$ кг/м^3 – массовая плотность морской воды (известный результат, его можно взять из справочника по физике), V – объем модуля. По условию задачи модуль есть шар, объем которого представляется в виде (результат следует взять из справочника по математике, раздел "Стереометрия"):

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{5}$$

В итоге максимальная масса полезного груза представляется в виде:

$$m_{\max} = \rho_0 V - M = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3 - M = 1794\,\text{кг}.$$

Ответ: $m_{\max} = \rho_0 V - M = \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3 - M = 1794$ кг. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Освещение Земли Луной»

Условие. В какой четверти Луна лучше освещает Землю – в первой или в третьей? Ответ обосновать и пояснить рисунком. (6 баллов).[1]

Решение:

Правая часть видимого диска Луны отражает свет лучше, чем левая, поскольку здесь меньше морей – это видно с первого взгляда (см. рис. 3). Поэтому в первой четверти, когда освещена правая сторона Луны, она лучше освещает Землю, чем в третьей.

Рис. 3. Видимый диск Луны.

Ответ: в первой четверти. ($\$_{\max} = 6$ баллов).

[1]Задача взята из набора задач для 8 классов регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по астрономии и космической физике 1997/1998 учебного года.

Задача № 8. «Опера "Мадам Батерфляй" и звезды»

Условие. В произведении итальянского композитора Джакомо Пуччини "Мадам Батерфляй" (Чио-Чио-сан) один из героев (Пинкертон) в первом действии поет следующее: "И тысяча звезд на нас смотрит своими глазами". Подтвердите или опровергните слова Пинкертона с астрономической точки зрения. (7 баллов)[2]

Решение:

Пинкертон, в принципе, прав. На всем звездном небе около 6 тысяч звезд, видимых невооруженным глазом. Из них половина в каждый момент времени находится над горизонтом. Однако слабые звезды не будут видны низко над горизонтом, особенно если прозрачность атмосферы не очень хорошая. В итоге, на звездном небе можно увидеть 1-2 тысячи звезд.

Ответ: Пинкертон, в принципе, прав – на звездном небе можно увидеть 1-2 тысячи звезд. ($\$_{\max} = 7$ баллов).

Задача № 9. «Полет к звезде Проксима Центавра»

Условие. Сколько времени (в годах) надо затратить космическому кораблю, летящему со скоростью 50 км/с, чтобы достичь ближайшей к Солнцу звезды Проксима Центавра, параллакс которой 0.76"? (8 баллов)

Дано:
$V = 50$ км/с,
$\pi'' = 0.76''$,

Найти:
t – ?

Решение:

Для определения времени полета до ближайшей к Солнцу звезды Проксима Центавра необходимо знать путь S и среднюю скорость движения V:

$$t = \frac{S}{V}. \tag{6}$$

Пройденный путь можно связать с параллаксом звезды в виде (при условии, что S выражено в парсеках):

$$S = \frac{1}{\pi''} = 1.32\,\text{пк} = 4.07 \cdot 10^{13}\ \text{км}. \tag{7}$$

здесь учтено 1 пк $= 3.08 \cdot 10^{13}$ км. В итоге время полета есть $t = 8.14 \cdot 10^{11}$ с $= 25.8$ тыс. лет. При получении последнего значения времени учтено, что один тропический год равен $3.156 \cdot 10^{7}$ сек.

Ответ: $t = 25.8$ тыс. лет. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Полная Луна на полюсе»

Условие. Приблизительно сколько раз в году при благоприятной погоде могут любоваться полной Луной королевские пингвины? Наклонение плоскости орбиты Луны к плоскости эклиптики составляет около 5°. Считайте, что королевские пингвины живут вблизи Южного полюса. (8 баллов).

Решение:

Во время полнолуния направление на Луну практически противоположно направлению на Солнце. То есть, во времена полнолуний Луна находится примерно в той области небесной сферы, которая противоположна направлению на Солнце. С точностью до 5° это означает, что полной Луной королевские пингвины могут любоваться только тогда, когда Солнце под горизонтом – т.е. 6-7 раз в году, во время полярной ночи. *Примечание:* если посчитать точно, то полная Луна может быть на Южном полюсе над горизонтом от 5 до 8 раз в году.

[2]Задача взята из набора задач для 8 классов Методических рекомендаций по разработке заданий для школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников в 2012/2013 учебном году, Автор – О.С. Угольников.

Ответ: 6-7 раз в году (при точном подсчете 5-8 раз в году). ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «Наблюдение метеора с двух точек поверхности Земли»

Условие. В пункте А в зените наблюдается метеор, имеющий блеск 0^m. В пункте В этот же метеор был виден на высоте 39° над горизонтом. Какой блеск был у него в этом пункте? Поглощением света в атмосфере пренебречь. (9 баллов)[2].

Дано:
$h_1 = 90°$,
$m_1 = 0^m$,
$h_2 = 39°$,

Найти:
m_2 – ?

Решение:

Явление метеора обусловлено нагревом, плавлением и сгоранием метеороидного вещества на высотах 80-120 км. Это значительно меньше радиуса Земли, и потому для решения задачи мы можем полагать поверхность Земли плоской.

Взаимное расположение пунктов наблюдения и метеора можно представить рисунком 4. Из рисунка видно, что расстояние от метеора до точки В, где он был виден на высоте h_2, равно $r_2 = r_1 / \sin h_2 = 1.887\, r_1$.

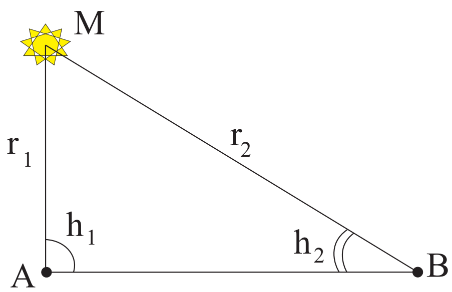

Рис. 4.

Далее воспользуемся законом обратных квадратов для освещенности, создаваемой вспышкой метеороида в точках А и В.

$$E_i \sim \frac{1}{r_i^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin h_2}\right)^2 = 2.52. \qquad (8)$$

Последний результат весьма близок к значению 2.512, которое отвечает отношению освещенностей двух точечных источников света с разностью звездных величин $\Delta m = 1^m$. Следовательно, блеск метеора в точке В без учета атмосферного поглощения составил $m_2 = m_1 + \Delta m = 1^m$.

Ответ: $m_2 = 1^m$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 12. «Продолжительность дня весеннего равноденствия на экваторе»

Условие. Как известно, день – это промежуток времени между восходом и заходом Солнца. Сколько времени длится день на земном экваторе в день весеннего равноденствия? На сколько он длиннее ночи? (10 баллов).

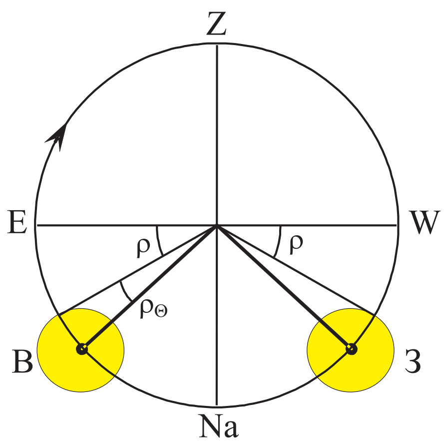

Рис. 5. К определению истинных положений Солнца на восходе и закате.

Решение:

Изначально ответ к задаче видится тривиальным. Как известно, день равноденствия отвечает дате, на которую день равен ночи. К тому же на экваторе в любую дату года день равен ночи! Действительно, это было бы так, при условии, если бы светило не имело заметных видимых размеров и отсутствовала атмосферная рефракция.

Под восходом Солнца понимают появление верхнего края его диска над горизонтом, а под заходом его исчезновение под горизонтом.

Из-за рефракции в момент восхода и захода верхней край солнечного диска находится на глубине $\rho = 35'$ под горизонтом (см. рис. 5). Следовательно, центр Солнца в эти моменты находится ниже горизонта на угол

$$\Delta h = \rho + \rho_\odot = 35' + 16' = 51' = 0.85°.$$

Следовательно, от восхода до захода центр солнечного диска описывает не дугу EZW (см. рис. 5), как на первый взгляд можно было бы ожидать, а дугу BEZWЗ. Отсюда длительность дня:

$$\Delta T_{\text{день}} = 12^{\text{ч}} + 2\Delta h \frac{24^{\text{ч}}}{360^\circ} = 12.11^{\text{ч}} = 12^{\text{ч}}06^{\text{м}}48^{\text{с}}.$$

Соответственно ночь будет длиться:

$$\Delta T_{\text{ночь}} = 24^{\text{ч}} - \Delta T_{\text{день}} = 11^{\text{ч}}53^{\text{м}}12^{\text{с}}.$$

День, длиннее ночи на $13^{\text{м}}36^{\text{с}}$. Это вполне ощутимая разница.

Ответ: День, длиннее ночи на $13^{\text{м}}36^{\text{с}}$. ($\$_{\text{max}} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Летящая звезда Барнарда»

Условие. В 1916 американским астрономом Эдвардом Барнардом была открыта необычная звезда – красный карлик, которая в последствие была названа "Летящей звездой Барнарда". Ее необычность, заключается в том, что она обладает самым большим *собственным движением* (угловой скоростью перемещения по небесной сфере) среди известных звезд ($\mu = 10.358''$ в год). Определите на какой угол смещается звезда по небосводу за 174 года. С угловыми размерами каких небесных тел можно сравнить данный угол? Вычислите также пройденное расстояние этой звездой в пространстве относительно Солнца, если расстояние до звезды 5.96 св. лет, а радиальная (лучевая) скорость звезды равна 106.8 км/с. (11 баллов).

Дано:
$\mu = 10.358''$/год,
$r = 5.96$ св. лет,
$V_r = 106.8$ км/с,
$t = 174$ года.

Найти:
$\Delta\varphi$ – ?
S – ?

Решение:

Угол, на который смещается звезда по небосводу за время t, представляется в виде:

$$\Delta\varphi = \mu\, t = 10.358''/\text{год} \cdot 174\,\text{года} = 1802'' \approx 0.5^\circ. \tag{9}$$

Полученное значение весьма близко к значениям угловых диаметров Луны и Солнца ($D'' = 32''$). Путь, пройденный звездой за указанное время, есть

$$S = V \cdot t.$$

Вычислим полную пространственную скорость звезды относительно Солнца:

$$V = \sqrt{V_\tau^2 + V_r^2}, \tag{10}$$

здесь V_τ – тангенциальная скорость звезды, которую можно определить в виде (по аналогии с формулой для скорости точки, движущейся по окружности):

$$V_\tau = \mu \cdot r = \left(\frac{10.358''}{3.156 \cdot 10^7\, c}\right) \times \left(\frac{1\,\text{рад}}{206265''}\right) \times (5.96 \cdot 9.46 \cdot 10^{12}\,\text{км}) = 89.7\,\text{км/с}. \tag{11}$$

При вычислении V_τ было учтено, что продолжительность одного тропического года есть $3.156 \cdot 10^7$ с, 1 рад $= 206265''$, 1 св. год $= 9.46 \cdot 10^{12}$ км. Согласно (10) полная скорость звезды есть $V = 139.5$ км/с. Тогда путь, пройденный звездой за время t, равен $S = 7.66 \cdot 10^{11}$ км $= 0.08$ св.г.

Ответ: $\Delta\varphi = \mu\, t \approx 0.5^\circ$, полученное значение весьма близко к значениям угловых диаметров Луны и Солнца ($D'' = 32''$); $S = 7.66 \cdot 10^{11}$ км $= 0.08$ св.г. ($\$_{\text{max}} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Звезда над станцией "Восток"»

Условие. В день летнего солнцестояния на антарктической станции "Восток" наблюдалась яркая звезда. Измерения показали, что ее нижняя кульминация произошла в 9 ч 30 мин местного времени на высоте $40°30'$ над горизонтом, а верхняя на высоте $75°50'$. Каковы координаты (δ, α) этой звезды и широта станции "Восток"? (12 баллов).

Дано:
$T = 9$ ч 30 мин,
$h_{\text{н}} = 40°30'$
$h_{\text{в}} = 75°50'$,

Найти:
δ, α – ?

Решение:

Положения звезды в верхней и нижней кульминации и основные точки и линии небесной сферы представлены на рис 6. Согласно данному рисунку, высота звезды в верхней кульминации есть

$$h_{\text{в}} = 90° - |\varphi| + |\delta|, \tag{12}$$

высота звезды в нижней кульминации

$$h_{\text{н}} = |\varphi| + |\delta| - 90°. \tag{13}$$

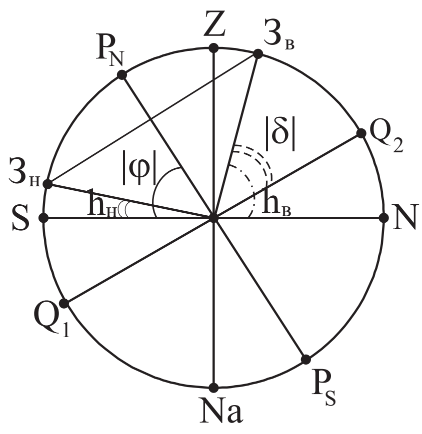

Рис. 6. К определению положений звезды над горизонтом.

Здесь учтено, что станция антарктическая и звезда незаходящая, следовательно, широта местности и склонение звезды должны быть отрицательными. Решая полученную систему уравнений (12) и (13) относительно искомых параметров φ и δ, в итоге получаем:

$$|\varphi| = 90° - \frac{1}{2}(h_{\text{в}} - h_{\text{н}}) = 72°28', \;\Rightarrow\; \varphi = -72°20'. \tag{14}$$

$$\delta = \frac{1}{2}(h_{\text{в}} + h_{\text{н}}) = 58°10', \;\Rightarrow\; \delta = -58°10'. \tag{15}$$

Местное время кульминаций не зависит от места наблюдения. Применив подвижную карту звездного неба для широты Самары, находим, что в 9 ч 30 мин в день летнего солнцестояния (22 июня) в нижней кульминации находятся звезды с прямым восхождением $\alpha = 15^h30^m$. Т.о. звезда имеет координаты: $\alpha = 15^h30^m$, $\delta = -58°10'$.

Ответ: $\alpha = 15^h30^m$, $\delta = -58°10'$. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Элементы орбиты кометы Хейла-Боппа»

Условие. Как правило, наиболее точные данные о движении кометы исследователи получают из наблюдений при прохождении последней через свой перигелий. Для этого как можно точнее измеряют перигелийное расстояние и скорость в перигелии. Например, перигелийное расстояние и скорость относительно Солнца кометы Хейла-Боппа, измеренные в момент прохождения ее через перигелий 1 апреля 1997 года, оказались равными: $q = 0.9180262$ а.е. $V_p = 43.876$ км/с. Такая точность в измерении q и V_p необходима, т.к. эксцентриситет впервые наблюдаемых комет очень близок к единице. Недостаточная точность в измерении q и V_p приводит к большим ошибкам при вычислении параметров движения. Учитывая это, вычислить большую полуось, эксцентриситет и афелийное расстояние орбиты, кометы Хейла-Боппа, а также период ее обращения вокруг Солнца. (13 баллов).

Дано:
$q = 0.9180262$ а.е.,
$V_p = 43.876$ км/с,

Найти:
a, ε, Q, T – ?

Решение:

Воспользуемся формулой для скорости небесного тела относительно Солнца (ее можно получить из закона сохранения механической энергии и второго закона Ньютона при движении по круговой орбите):

$$V^2 = G\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{G\mathfrak{M}_\odot}{a_\oplus}\left(\frac{2a_\oplus}{r} - \frac{a_\oplus}{a}\right) = V_\oplus^2\left(\frac{2a_\oplus}{r} - \frac{a_\oplus}{a}\right), \;\Rightarrow$$

$$a = a_\oplus \left(\frac{2a_\oplus}{q} - \frac{V^2}{V_\oplus^2} \right)^{-1} = 1\,\text{а.е} \left(\frac{2}{0.9180262} - \left(\frac{43.876}{29.765} \right)^2 \right)^{-1} = 176.2\,\text{а.е.} \qquad (16)$$

При вычислении большой полуоси было учтено, что $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – универсальная гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца, $V_\oplus = G\mathfrak{M}_\odot / a_\oplus = 29.765$ км/с – средняя скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца.

Эксцентриситет орбиты представляется в виде:

$$\varepsilon = 1 - \frac{q}{a} = 0.994789.$$

Афелийное расстояние есть

$$Q = a(1 + \varepsilon) = 351.5\ \text{а.е.}$$

Наконец, воспользовавшись третьим законом Кеплера, находим период обращения

$$\frac{a^3}{a_\oplus^3} = \frac{T^2}{T_\oplus^2}, \quad \Rightarrow \quad T = T_\oplus \left(\frac{a}{a_\oplus} \right)^{3/2} = 2339\,\text{лет.} \qquad (17)$$

Ответ: $a = 176.2$ а.е., $\varepsilon = 0.994789$, $Q = 351.5$ а.е., $T = 2339$ лет ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Сила притяжения Солнца в точках Лагранжа»

Условие. Оцените, на сколько процентов сила притяжения Солнца, действующая на пробное тело, находящееся в точке Лагранжа L_1 Земли, будет больше силы притяжения Солнца, действующей на тоже тело, находящееся в точке Лагранжа L_2. Все необходимые численные данные возьмите из справочника по астрономии. (13 баллов).

Решение:

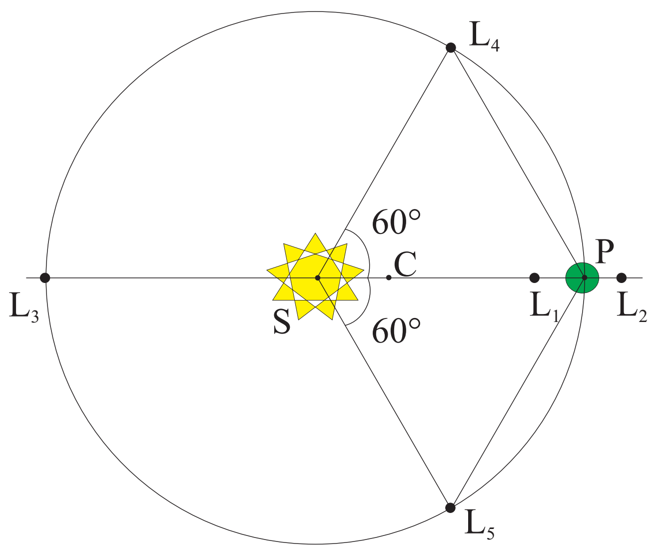

Рис. 7. К определению точек положения Лагранжа.

Точки Лагранжа или ***точки либрации*** или ***L-точки*** – точки пространства в системе двух массивных тел (см. рис. 7, в нашем случае Солнца S и планеты P), в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, на которое не действуют никакие другие силы, кроме гравитационных сил со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел.

Более точно точки Лагранжа представляют собой частный случай при решении т.н. *ограниченной задачи трех тел* – когда орбиты всех тел являются круговыми и масса одного из них намного меньше массы любого из двух других. В этом случае можно считать, что два массивных тела обращаются вокруг их общего центра масс (C) с постоянной угловой скоростью.

В пространстве вокруг них существуют пять точек, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой может оставаться неподвижным во вращающейся системе отсчета, связанной с массивными телами. В этих точках гравитационные силы, действующие на малое тело, уравновешиваются центробежной силой.

Гелиоцентрические расстояния точек L_1 и L_2 представляются в виде (можно найти в справочнике по астрономии или в Wikipedia):

$$r_{L_1} = a_\oplus \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \right), \quad r_{L_2} = a_\oplus \left(1 + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \right), \quad \alpha = \frac{\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus}. \qquad (18)$$

Силы притяжения Солнца, действующая на пробное тело массы m в точках L_1 и L_2, есть

$$F_{L_1} = \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\odot}{r_{L_1}^2},\ \ F_{L_2} = \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\odot}{r_{L_2}^2},\ \Rightarrow\ \eta = \left(\frac{F_{L_1} - F_{L_2}}{F_{L_1}}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{r_{L_1}^2}{r_{L_2}^2}\right) \times 100\%. \qquad (19)$$

или

$$\eta = \left(1 - \frac{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}\right)^2}{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}\right)^2}\right) \times 100\% \approx 4\sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \times 100\% = 4\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{\mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus}\right)} \times 100\% = 4.0\%. \qquad (20)$$

Ответ: $\eta = \left(\frac{F_{L_1} - F_{L_2}}{F_{L_1}}\right) \times 100\% = 4.0\%$. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Гора Стрельная и огни Ульяновска»

Условие. Во время экскурсии участников Самарской летней астрономической школы 2013 года на гору Стрельная (на рис. 9 указана черной точкой с числом "375"), находящуюся в Жигулевском заповеднике (на территории Самарской области), экскурсовод утверждал, что с вершины этой горы в ясные ночи можно увидеть огни уличных фонарей населенных пунктов Ульяновской области и даже города Ульяновска. Проверьте, прав ли был экскурсовод. Для решения поставленной задачи следует пользоваться картой Самарской области (см. рис. 9) и значением высоты горы – $H = 375$ м. Высоту фонарного столба следует принять равной $h = 8$ м. (14 баллов).

Дано:
$H = 375$ м,
$h = 8$ м.

Найти:
прав ли гид – ?

Решение:

Пусть точка A определяет положение вершины горы на поверхности Земли-шара, точка C – фонарь уличного столба (см. рис. 8). Для того чтобы наблюдатель мог видеть свет уличного фонаря, световой луч AC не должен "прокалывать" тело Земли. В предельном случае луч должен касаться Земли в точке B.

Чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо определить расстояние между горой и фонарным столбом по поверхности Земли (дуга – $DE = \ell$), и сравнить с расстоянием до ближайшего населенного пункта Ульяновской области (Ульяновска).

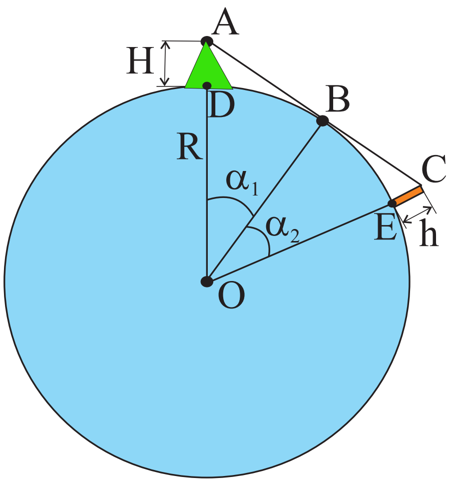

Рис. 8. К определению условий задачи.

Очевидно, что длину дуги DE можно представить в виде:

$$\ell = R_\oplus\,(\alpha_1 + \alpha_2)\,. \qquad (21)$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle OAB$, $\triangle OBC$. Для их сторон можно записать следующие уравнения:

$$\cos\alpha_1 = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H},\ \ \cos\alpha_2 = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}. \qquad (22)$$

тогда синусы данных углов можно представить в виде:

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + H}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{2H}{R_\oplus}}, \qquad (23)$$

$$\sin\alpha_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{2h}{R_\oplus}}, \qquad (24)$$

здесь учтено, что $h, H \ll R_\oplus = 6371$ км; следовательно для синусов углов можно использовать приближение $\sin\alpha_i \approx \alpha_i$. В итоге можем записать ℓ таким образом:

$$\ell \approx R_\oplus\left(\sqrt{\frac{2H}{R_\oplus}} + \sqrt{\frac{2h}{R_\oplus}}\right) = \sqrt{2\,R_\oplus h} + \sqrt{2\,R_\oplus H} = 79.22\,\text{км} \approx 80\,\text{км}. \qquad (25)$$

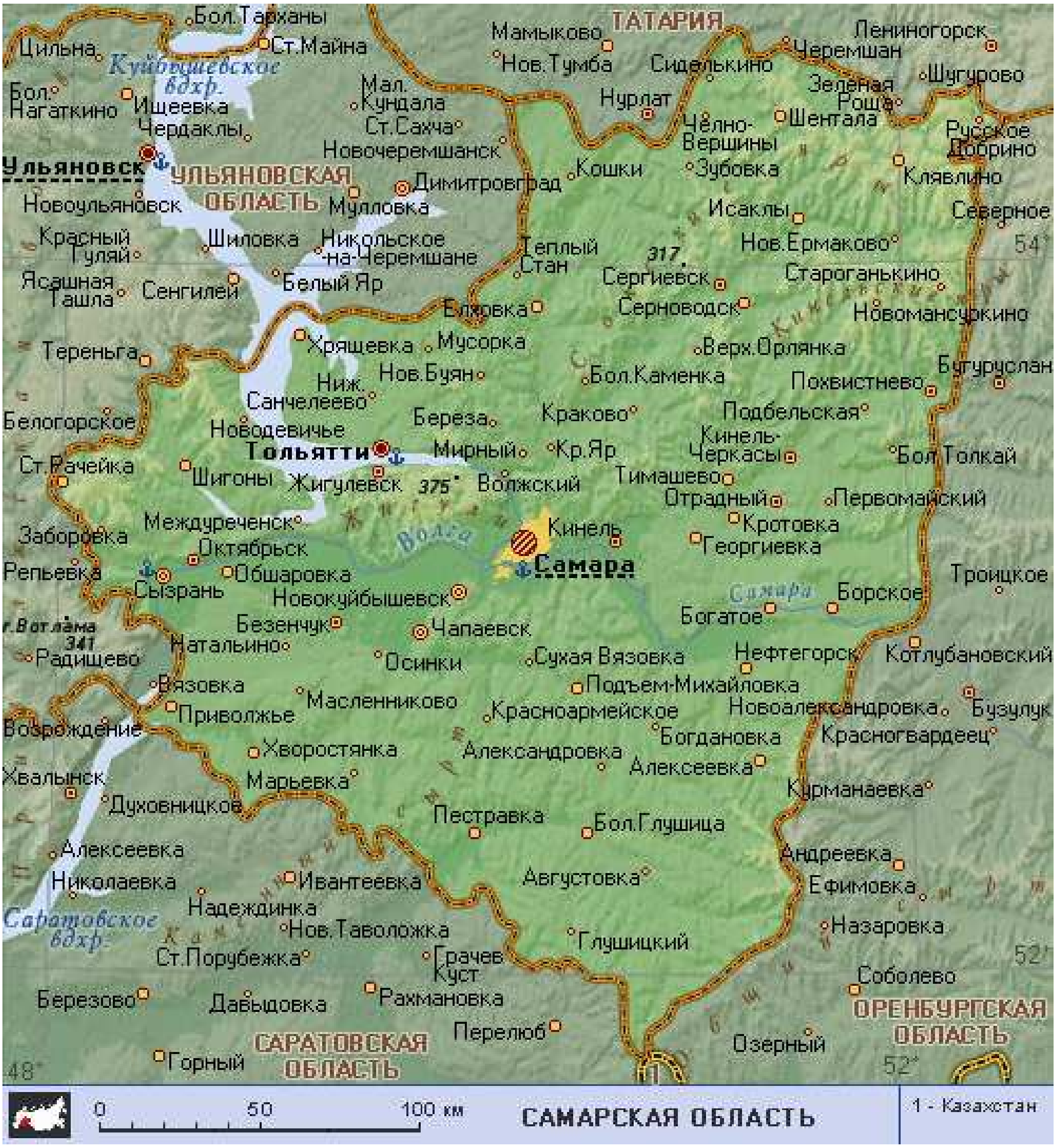

Рис. 9. Карта Самарской области.

По карте определяем, что расстояние от вершины до ближайшей точки границы Ульяновской области составляет $r \approx 52$ км < 80 км, если там располагается небольшой населенный пункт (неуказанный на карте) с уличным освещением, то экскурсовод прав. Ближайший объект Ульяновской области, обозначенный на карте – Белый яр (расстояние - 86.5 км), лежит в недосягаемой для прямой видимости зоне. Ульяновск лежит на расстоянии более 100 км от вершины Стрельной и, следовательно, его уличные фонари тоже не могут быть видны.

Ответ: экскурсовод прав в случае, если в окрестности ближайшей точки географической границы Ульяновской области ($r \approx 52$ км) располагается небольшой населенный пункт (неуказанный на карте) с уличным освещением. Однако, ближайший объект Ульяновской области обозначенный на карте – Белый яр (расстояние - 86.5 км) и тем более Ульяновск лежат в недосягаемой для прямой видимости зоне. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Притяжение астероида с полостью»

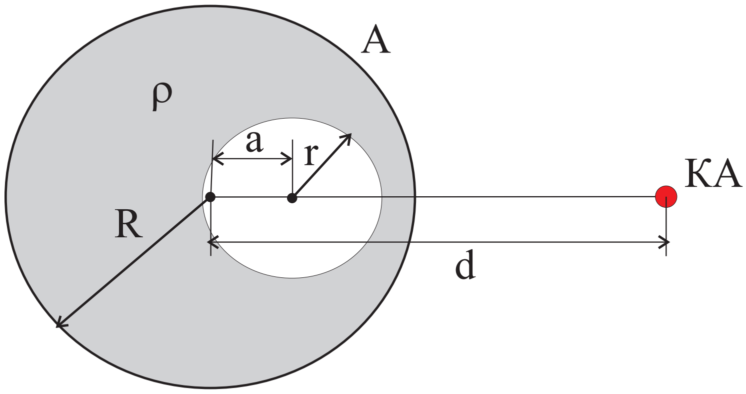

Рис. 10. К определению положения КА по отношению к астероиду на момент измерений.

Условие. Имеется астероид (А), форма которого есть шар радиуса R, с однородным распределением вещества с плотностью ρ. Согласно данным радиолокации в теле астероида присутствует полость сферической формы, радиус которой $r < R$ (см. рис. 10). Космический аппарат (КА), прошедший над полостью на расстоянии d от центра астероида, смог измерить ускорение свободного падения g, обусловленное полем тяготения этого астероида. Опираясь на полученные результаты, вычислите расстояние a между геометрическими центрами астероида и полости. (15 баллов).

Дано:
R, r, $r < R$;
ρ, g, d

Найти:
a – ?

Решение:

Если бы данный шар не имел полости, т.е. был однородным по всему объему, то на КА массы m со стороны шара действовала бы сила притяжения F_s:

$$F_s = \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_1}{d^2}. \tag{26}$$

здесь $\mathfrak{M}_1$ – масса всего шара. С другой стороны эту силу можно представить суммой сил притяжения (в данном случае сонаправленных), действующих со стороны 1) шара с полостью (F_1) и 2) шара радиуса r (F_2), при условии, что КА находится над полостью:

$$F_s = F_1 + F_2, \;\Rightarrow\; F_1 = F_s - F_2, \;\text{ где }\; F_2 = \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_2}{(d-a)^2}. \tag{27}$$

Массы большого и малого шаров можно представить в виде:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4}{3}\pi R^3\,\rho, \;\; \mathfrak{M}_2 = \frac{4}{3}\pi r^3\,\rho. \tag{28}$$

Сила, с которой шар с полостью притягивал КА можно представить иначе

$$F_1 = m\,g. \tag{29}$$

Из результатов (26)-(29) следует уравнение вида:

$$m\,g = \frac{4}{3}\pi R^3\frac{G\,m\,\rho}{d^2} - \frac{4}{3}\pi r^3\frac{G\,m\,\rho}{(d-a)^2}, \;\Rightarrow\; g = \frac{4}{3}\pi\,G\,\rho\left(\frac{R^3}{d^2} - \frac{r^3}{(d-a)^2}\right),$$

$$\frac{r^3}{(d-a)^2} = \left(\frac{R^3}{d^2} - \frac{3\,g}{4\pi\,G\,\rho}\right), \;\Rightarrow\; a = d - \sqrt{r^3\left(\frac{R^3}{d^2} - \frac{3\,g}{4\pi\,G\,\rho}\right)^{-1}}. \tag{30}$$

Ответ: $a = d - \sqrt{r^3\left(\frac{R^3}{d^2} - \frac{3\,g}{4\pi\,G\,\rho}\right)^{-1}}$. ($\$_{\max} = 15$ баллов).